XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

XII. osztály

1. feladat. Adott $a > 0$ esetén oldd meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{a} = \sqrt{(a+y)(a+z)} \\ (\sqrt{y}+\sqrt{z})\sqrt{a} = \sqrt{(a+z)(a+x)} \\ (\sqrt{z}+\sqrt{x})\sqrt{a} = \sqrt{(a+x)(a+y)} \end{cases}$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Összeadva az egyenleteket az

$$\sum_{cyc}\left((\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{a} - \sqrt{(a+x)(a+y)}\right) = 0 \tag{1}$$

egyenlőséget kapjuk. **(2 pont)**

Másrészt

$$\sqrt{(a+x)(a+y)} \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{a} \Leftrightarrow (\sqrt{xy}-a)^2 \geq 0.$$

(2 pont)

Egyenlőség az $xy = a^2$ esetben áll fenn, ezért

$$\sum_{cyc}\left(\sqrt{(a+x)(a+y)} - (\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{a}\right) \geq 0$$

(1 pont)

Ezek szerint az (1)-es egyenlőség csak az $xy = yz = zx = a^2$ esetben állhat fenn, ahonnan kapjuk, hogy $x^2y^2z^2 = a^6$, de $y^2z^2 = a^4$. **(2 pont)**

Ebből következik, hogy $x^2 = a^2$, azaz $x = a$. **(1 pont)**

Tehát $x = y = z = a$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Határozd meg a p és q prímszámokat, ha $p^2 + q^3$ köbszám!

Fedorszki Ádám, Beregszász

Megoldás. Legyen $p^2 + q^3 = a^3$, ahol a természetes szám. A megoldandó egyenlet

$$p^2 = (a - q)(a^2 + aq + q^2) \tag{2}$$

(1 pont)

alakba írható. Mivel p prímszám, és $a - q < a^2 + aq + q^2$, következik, hogy $a - q = 1$. **(1 pont)**

Ezt behelyettesítve (2)-be kapjuk, hogy $p^2 = 3q^2 + 3q + 1$ azaz

$$(p - 1)(p + 1) = 3q(q + 1). \tag{3}$$

(1 pont)

Innen észrevehető, hogy $p - 1$ vagy $p + 1$ osztható q-val. Mivel

$$(q + 1)^2 < p^2 < (2q + 1)^2 \Leftrightarrow q + 1 < p < 2q + 1 \tag{4}$$

(1 pont)

Kivonva 1-et kapjuk, hogy $q < p - 1 < 2q$. **(1 pont)**

Ebből megállapítható, hogy $p - 1$ nem osztható q-val, tehát $p + 1$ többszöröse q-nak. **(1 pont)**

Másrészt (4)-ből következik, hogy $q + 2 < p + 1 < 2q + 2$, ahonnan kapjuk, hogy $p + 1 = 2q$, azaz $p = 2q - 1$. **(2 pont)**

Felhasználva a (3) egyenlőséget következik, hogy $q = 7$ és $p = 13$. **(1 pont)**

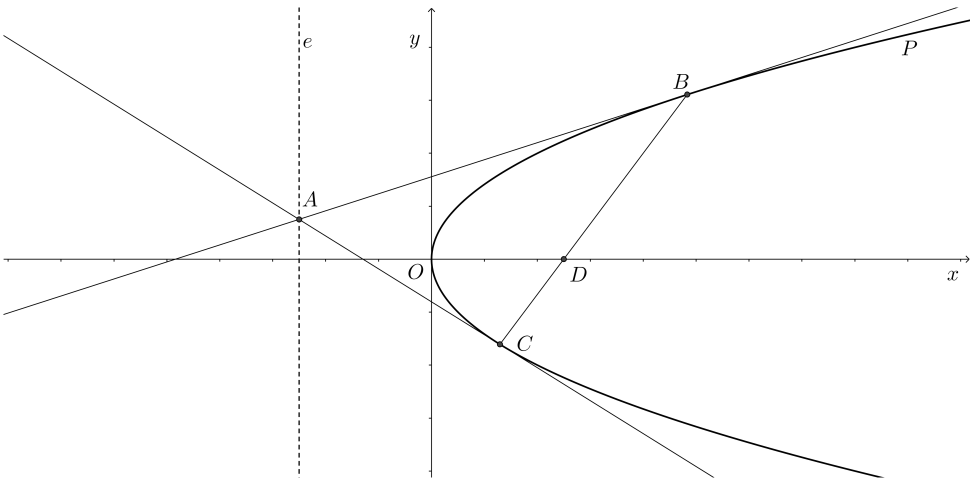
Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Legyen $\mathcal{P}$ egy parabola és e egy, a parabolát nem metsző, annak szimmetriatengelyére merőleges egyenes. Az e egyenes tetszőleges A pontjából érintőket húzunk a parabolához. Igazold, hogy mialatt az A pont bejárja az e egyenest, az érintési pontokat összekötő egyenesek átmennek egy rögzített ponton!

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Első megoldás. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben legyen $\mathcal{P} : y^2 = 2px$, $e : x = -a$, $A(-a, b)$, $a, p > 0$ rögzített, $b \in \mathbb{R}$ változó. **(1 pont)**



A P parabola valamely (x_0, y_0) pontjához húzott érintő egyenlete:

$$\text{é} : y_0 y = p(x_0 + x) \Leftrightarrow y_0 y = p\left(\frac{y_0^2}{2p} + x\right)$$

(1 pont)

Másrészt

$$A \in \text{é} \Leftrightarrow y_0 b = p\left(\frac{y_0^2}{2p} - a\right) \Leftrightarrow y_0^2 - 2by_0 - 2ap = 0. \tag{5}$$

(1 pont)

Ez utóbi egyenlet megoldásai az érintési pontok ordinátái, az abszcisszákat a parabola egyenletéből számítjuk ki. Legyenek az érintési pontok $B(x_1, y_1)$ és $C(x_2, y_2)$. **(1 pont)**

Ha $b = 0$, akkor az érintési pontok $B(a, \sqrt{2ap})$ és $C(a, -\sqrt{2ap})$, a BC egyenes a parabola szimmetriatengelyét a $D(a, 0)$ pontban metszi.

(1 pont)

Ha $b \neq 0$, akkor a BC egyenes iránytangense $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2 - y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{2b} = \frac{p}{b}$, egyenlete pedig

$$BC : y - y_1 = \frac{p}{b}(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{p}{b}\left(x - \frac{y_1^2}{2p}\right),$$

(2 pont)

ahonnan az (5)-t felhasználva kapjuk, hogy:

$$y - y_1 = \frac{p}{b}x - \frac{2by_1 + 2ap}{2b} \Leftrightarrow p(x - a) - by = 0.$$

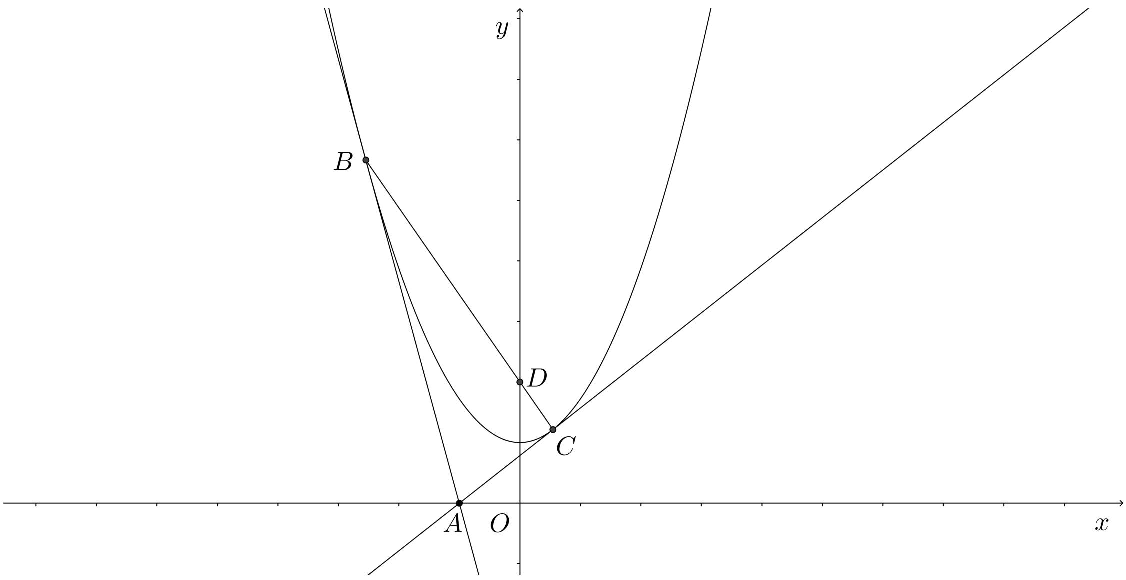
(1 pont)

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesülhet bármely valós b szám esetén , ha $y = 0$ és $x = a$, tehát a BC egyenes átmegy a $D(a, 0)$ rögzített ponton. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. A koordináta rendszert úgy választjuk meg, hogy a parabola szimmetriatengelye az Oy tengely, és az e egyenes az Ox tengely legyen.



Ekkor a parabola az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$ függvény grafikus képe, $a, b > 0$. Legyen $A(c, 0)$, $c \in \mathbb{R}$. A $\mathcal{P}$ parabola egyenlete: $y = ax^2 + b$, az e egyenes egyenlete $y = 0$. $\mathcal{P}$-hez, ennek valamely (x_0, y_0) pontjába húzott érintő egyenlete:

$$\text{é} : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Felhasználva, hogy $f(x_0) = ax_0^2 + b$ és $f'(x_0) = 2ax_0$ kapjuk:

$$\text{é} : y = 2ax_0x - ax_0^2 + b.$$

$A \in \text{é} \Leftrightarrow 0 = 2acx_0 - ax_0^2 + b$ ahonnan következik, hogy $ax_0^2 - 2acx_0 - b = 0$, amely egyenlet megoldásai a B és C érintési pontok abszcisszái. A BC egyenes iránytangense:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) = 2ac,$$

egyenlete pedig rendre így alakítható: $y - y_1 = 2ac(x - x_1) \Leftrightarrow y = 2acx - 2acx_1 + ax_1^2 + b$.
Végül $y = 2acx + 2b$. A $D(0, 2b)$ pont teljesíti a BC egyenes egyenletét bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén.

$\blacksquare$

4. feladat. a) Kiszínezhető-e egy egyenes minden pontja két színnel úgy, hogy minden egységtávolságra fekvő pontpár különböző színű legyen?
b) Bizonyítsd be, hogy bárhogy színeznénk két metsző egyenes összes pontját két színt használva, mindig lesz legalább két, adott d távolságra fekvő azonos színű pont, bármilyen d távolság esetén!

Nicholas Martin, Shepherd, AEÁ

Első megoldás. a) Létezik ilyen színezés: legyen a két szín P illetve Q. Vegyünk egy tetszőleges pontot, fessük P színűre, és rendeljük hozzá a nulla abszcisszát, **(1 pont)**
mintha a valós számtengely origója lenne. Ezek után minden páratlan egész számot Q-ra, minden párosat P színűre festünk, **(1 pont)**
a többi pontot illetően pedig: a PQ végpontokkal jelölteket P színűre, a QP-vel jelölteket pedig Q színűre festjük. Ilymódon egyetlen egységhosszúságú szakasz sem fog azonos színű végpontokkal rendelkezni. **(1 pont)**
b) Legyen a két, egymást α szögben metsző egyenes metszéspontja O. Feltehetjük, hogy $0 < \alpha \leq 90°$. A következő eseteket vesszük figyelembe:

1. Ha $\alpha = 60°$, akkor mindkét egyenesen felveszünk O-tól d távolságra egy-egy pontot, így egy egyenlő oldalú háromszög keletkezik, amelynek legalább két csúcsa azonos színű. **(2 pont)**

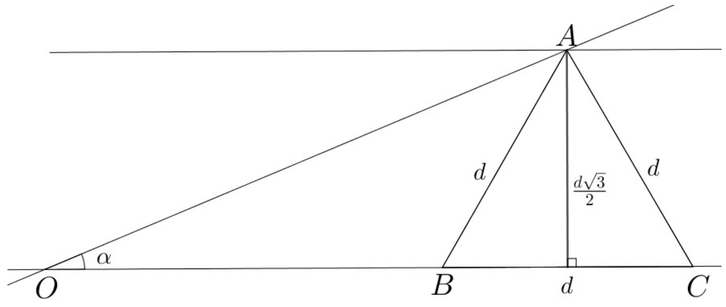
2. Ha $\alpha < 60°$, megszerkesztünk egy ABC háromszöget a következő módon: legyen az AB oldal hossza d, és szerkesztünk két szöget a szakasz végpontjainál (úgy, hogy a két szög közös oldala az AB szakasz legyen), egyik szög mértéke legyen $120°$, a másiké $60° - \alpha$. Ilymódon a harmadik szög mértéke, ami az AB oldallal szemközti, α lesz. Az így kapott ABC háromszöget úgy helyezzük el, hogy a C csúcs az O ponttal essen egybe, és az A és B pontok a két adott egyenesre kerüljenek. Ilymódon az AB oldal 60 fokos szöget fog alkotni az egyenesek egyikével. Legyen az A pont az, ahol ez a 60 fokos szög van. Szerkesztünk most egy D pontot a CA egyenesre úgy, hogy az A pont a C és D közé essen, és legyen $AD = d$. Ekkor az ABD háromszög egyenlő oldalú, és oldalhossza d. Függetlenül a színezési módszertől, legalább két azonos színű, egymástól d távolságra eső csúcsa lesz. **(2 pont)**

3. Ha $\alpha > 60°$, akkor szintén egy egyenlő oldalú háromszöget fogunk szerkeszteni, de ezúttal, míg AB szintén d hosszúságú lesz, az A szög legyen 60 fokos, a B szög viszont $120° - \alpha$, tehát a C szög mértéke α. Az ABC háromszöget ismét úgy helyezzük el, hogy C csúcsa egybeessen az O ponttal, és A illetve B csúcsai a két különböző egyenesre essenek. Az AC oldal C -n túli meghosszabbítását jelöljük D-vel úgy, hogy $AD = d$. Így az ABD háromszög egyenlő oldalú, és d oldalhosszú. Ezzel a feladatot megoldottuk. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Tegyük fel, hogy a két egyenes α szögben metszi egymást, ahol $0 < \alpha \leq 90°$. Az egyik egyenestől $\frac{d\sqrt{3}}{2}$ távolságra húzunk egy párhuzamos egyenest, ez biztosan metszi a másik egyenest egy A pontban. Ekkor szerkeszthető egy d oldalhosszúságú ABC egyenlő oldalú háromszög úgy, hogy a B és C pontok az első egyenesen legyenek. Mivel az ABC háromszög egyenlő oldalú háromszög két csúcsa azonos színű, így létezik két azonos színű pont mely d távolságra van egymástól.



■

5. feladat. Legyen $x > 1$ valós szám. Igazold, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[x + \frac{k-1}{n}\right]} = \frac{n \cdot \big([x]+1\big) - \big[n \cdot \{x\}\big]}{[x] \cdot \big([x]+1\big)}$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Felhasználva, hogy $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$, valamint $[x] \le x < [x]+1, \forall x \in \mathbb{R}$ könnyen belátható, hogy létezik egyetlen olyan $k' \in \{1, 2, \ldots, n\}$, amelyre

$$[x] = \left[x + \frac{k'-1}{n}\right] \le x < \left[x + \frac{k'}{n}\right] = [x] + 1$$

(2 pont)

Kivonunk minden tagból $[x]$-t és kapjuk, hogy $0 \le \{x\} < 1$.

Másrészt

$$[x] = \left[x + \frac{k'-1}{n}\right] \Leftrightarrow \left[\{x\} + \frac{k'-1}{n}\right] = 0$$

(1 pont)

$$[x] + 1 = \left[x + \frac{k'}{n}\right] \Leftrightarrow \left[\{x\} + \frac{k'}{n}\right] = 1$$

(1 pont)

Innen pedig következik, hogy

$$0 = \left[\{x\} + \frac{k'-1}{n}\right] \le \{x\} < \left[\{x\} + \frac{k'}{n}\right] = 1$$

(1 pont)

Mivel $\left[\{x\}+\frac{k'-1}{n}\right]=0$, ezért $\{x\}<1-\frac{k'-1}{n}$, valamint $\left[\{x\}+\frac{k'}{n}\right]=1$, ezért $\{x\}\geq 1-\frac{k'}{n}$.(**1 pont**)
Tehát $1-\frac{k'}{n}\leq\{x\}<1-\frac{k'-1}{n}$, ezt beszorozva n-el kapjuk, hogy $n-k'\leq n\cdot\{x\}<n-k'+1$. Innen pedig következik, hogy $\left[n\cdot\{x\}\right]=n-k'$. (**1 pont**)

Végül pedig:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left[x+\frac{k-1}{n}\right]} &= \sum_{k=1}^{k'}\frac{1}{\left[x+\frac{k-1}{n}\right]}+\sum_{k=k'+1}^{n}\frac{1}{\left[x+\frac{k-1}{n}\right]}\\ &= \sum_{k=1}^{k'}\frac{1}{[x]}+\sum_{k=k'+1}^{n}\frac{1}{[x]+1}=\frac{k'}{[x]}+\frac{n-k'}{[x]+1}\\ &= \frac{n\cdot[x]+k'}{[x]\cdot\left([x]+1\right)}=\frac{n\cdot[x]+n-(n-k')}{[x]\cdot\left([x]+1\right)}=\frac{n\cdot\left([x]+1\right)-\left[n\cdot\{x\}\right]}{[x]\cdot\left([x]+1\right)}\end{aligned}$$

(**2 pont**)

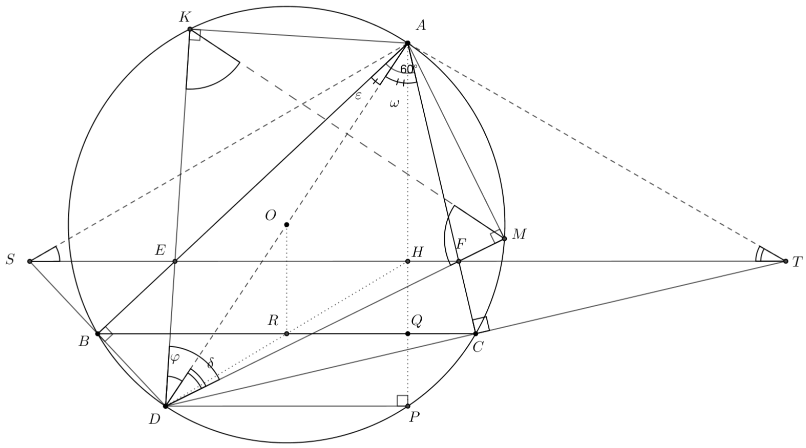
Hivatalból (**1 pont**)

■

6. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszög köré írt körön az A csúcspont átmérősen ellentett pontja D, a háromszög magasságpontja a H pont, a háromszög A csúcsánál levő belső szög $60°$-os. A H ponton átmenő, a BC oldallal párhuzamos egyenes az AB és AC oldalakat rendre az E és F pontokban metszi. A DE és DF egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körével való második metszéspontjai rendre a K és M pontok. Határozd meg a DEF és DKM háromszögek kerületeinek arányát!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás. A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk, amelyen az A pontból induló magasságnak a háromszög köré írt körével való másik metszéspontját P-vel, a magasságnak a BC oldalon levő talppontját Q-val, a HD és BC szakaszok metszéspontját pedig R-rel jelöltük.



(1 pont)

A D pontot a B és C pontokkal összekötő egyenesek az EF egyenest rendre az S és T pontokban metszik. Először azt mutatjuk meg, hogy a DEF háromszög kerülete a BC szakasz hosszának éppen a kétszerese. Felhasználjuk azt az elemi geometriai tételt, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a köré írt körön vannak. Ennek alapján az HP szakasz felezőpontja éppen a Q pont. Ugyanakkor az AD szakasz a köré írt kör átmérője, ezért $\widehat{APD} = 90°$, így $DP \parallel RQ$, tehát az RQ szakasz a HDP háromszög középvonala. Ebből azonnal adódik, hogy a HD szakasz felezőpontja R. A H ponton át párhuzamost húztunk a BC oldallal, ezért $RC \parallel HT$, és mivel a HD szakasz felezőpontja R, ezért a HDT háromszög középvonala RC. Ez viszont azt is jelenti, hogy $DC = CT$. Hasonlóan egyszerűen láthatjuk be, hogy $DB = BS$. Ez azt jelenti, hogy BC a DTS háromszög középvonala és emiatt $ST = 2BC$. **(1 pont)**

Mivel $AB \perp DS$, illetve $AC \perp DT$, és a $DB = BS$, valamint $DC = CT$ alapján a DS és DT egyenesek felezőmerőlegesei rendre az AB és AC egyenesek, **(1 pont)**

eszerint $ES = ED$ illetve $FT = FD$. **(1 pont)**

Ebből következik, hogy a DEF háromszög kerületére teljesül, hogy:

$$K_{DEF} = DE + EF + DF = ES + EF + FT = ST,$$

mivel azonban $ST = 2BC$, ezért

$$K_{DEF} = 2BC.$$

(1 pont)

Most bizonyítjuk, hogy a DKM háromszög egy BC oldalú szabályos háromszög.

Mivel AD az ABC háromszög köré írt körének átmérője ezért

$$AS = AT = AD, \tag{6}$$

hiszen az A pont rajta van a DS és DT szakaszok felezőmerőlegesén.

Az $ES = ED$ és $AS = AD$ egyenlőségeket is figyelembe véve azt kapjuk, hogy az AED és AES háromszögek egybevágóak, hiszen a két háromszögben az AE oldal közös. Hasonlóképpen adódik az $FT = FD$ és $AT = AD$ egyenlőségekből az AFT és AFD háromszögek egybebvágósága, amelyekben az AF oldal közös. **(1 pont)**

Ezekől az is adódik, hogy a háromszögek megfelelő szögei is egyenlők, ezért az ábra jelöléseivel $\widehat{ADE} = \varphi = \widehat{ASE}$, $\widehat{DAE} = \varepsilon = \widehat{SAE}$ illetve $\widehat{ADF} = \delta = \widehat{ATF}$ és $\widehat{DAF} = \omega = \widehat{TAF}$.

Ugyanakkor a feladat feltétele szerint $\varepsilon + \omega = 60°$, ezért egyrészt $\widehat{SAT} = 2 \cdot (\varepsilon + \omega) = 120°$, másrészt (6) szerint az AST háromszög egyenlő szárú, így $\varphi = \delta = 30°$. **(1 pont)**

Az ABC köré írt körön a $60°$-os kerületi szöghöz a BC oldallal egyenlő hosszúságú húr tartozik, és mivel $\varphi + \delta = 60°$ ezért $KM = BC$.

Az ADK és ADM derékszögű háromszögekben viszont $\widehat{ADK} = \varphi = 30°$, valamint $\widehat{ADM} = \delta = 30°$, így $\widehat{DAK} = 60°$ és $\widehat{DAM} = 60°$, vagyis $DK = DM = BC$, ebből pedig $KM = BC$ alapján azt kapjuk, hogy a DKM háromszög mindhárom oldala a BC szakasszal egyenlő hosszúságú.

Ez azt jelenti, hogy a DGM valóban szabályos háromszög, amelynek kerülete: $K_{DKM} = 3BC$.

(1 pont)

Tehát a DEF és DKM háromszögek kerületeinek aránya:

$$\frac{K_{DEF}}{K_{DKM}} = \frac{2BC}{3BC} = \frac{2}{3}.$$

(1 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■