XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$ függvény. Számítsd ki az

$$f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\ldots+f\left(\frac{2018}{2019}\right)+f\left(\frac{2019}{2019}\right)$$

összeg értékét!

Fedorszki Ádám, Beregszász

Megoldás. Észrevehető, hogy

$$f(x)=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}.$$

(2 pont)

Tehát

$$f\left(\frac{i}{2019}\right)=\frac{i^3}{i^3+(2019-i)^3}.$$

Ekkor

$$f\left(\frac{i}{2019}\right)+f\left(\frac{2019-i}{2019}\right)=1,\ \forall i\in\{1,2,...,2019\}. \tag{1}$$

(3 pont)

Ahonnan következik, hogy

$$\begin{aligned}S&=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\ldots+f\left(\frac{2018}{2019}\right)+f\left(\frac{2019}{2019}\right)\\&=\left(f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2018}{2019}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{2017}{2019}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\frac{1009}{2019}\right)+f\left(\frac{1010}{2019}\right)\right)\\&=f(1)+1009\cdot 1=1010.\end{aligned}$$

(4 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Az (1) helyett, az $f(x)+f(1-x)=1$ összefüggés bizonyításáért szintén 3 pont adható.

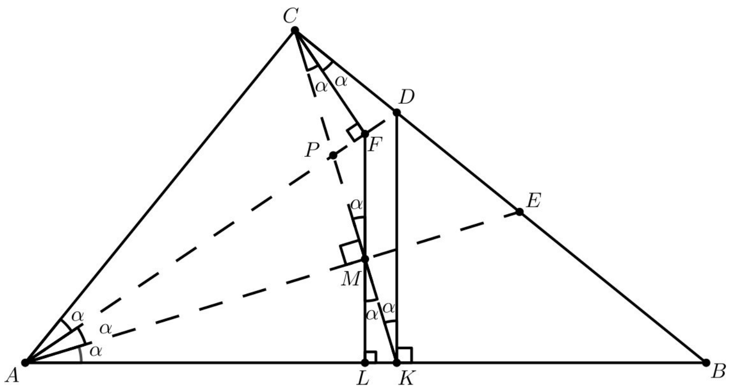
2. feladat. A C-ben derékszögű ABC háromszög CB befogóján úgy vesszük fel a D és E pontokat, hogy $\widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAB}$. Legyen F a C csúcsból az AD szakaszra húzott merőleges talppontja, míg a D és F pontokból az AB átfogóra húzott merőlegesek talppontjai rendre K és L. Legyen M a CK és FL szakaszok metszéspontja.

a) Igazold, hogy az M pont rajta van az AE egyenesen!

b) Számítsd ki az $\dfrac{FM}{DK}$ arány értékét!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



a) A feltételek alapján $\widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAB} = \alpha$. Kimutatjuk, hogy

$$\widehat{MAK} = \alpha,$$

(1 pont)

ami pontosan azt jelenti, hogy M pont rajta van az AE egyenesen.

Az $ACDK$ négyszögben a C és K szög derékszög, következik, hogy körbeírható (húrnégyszög).

(1 pont)

Ezért $\widehat{DKC} = \widehat{DAC} = \alpha$. **(1 pont)**

Továbbá a $\widehat{CMF} = \widehat{LMK} = \widehat{MKD} = \alpha$. Tehát a $CAMF$ négyszögben $\widehat{CAF} = \widehat{CMF} = \alpha$. Következésképpen a $CAMF$ négyszög is körbeírható. **(1 pont)**

Tehát

$$\widehat{AMC} = \widehat{AFC} = 90°.$$

Ekkor a AMK háromszögben az M szög derékszög. Ahonnan következik, hogy

$$\widehat{MAK} = \widehat{LMK} = \alpha,$$

amit igazolni akartunk. **(1 pont)**

b) Jelölje a P a CK és AD egyenesek metszéspontját. Mivel a $CAMF$ négyszög körbeírható, következik, hogy a

$$\widehat{FCP} = \widehat{PAM} = \alpha.$$

(1 pont)

Tehát a CPD háromszögben, CF magasság és szögfelező, ahonnan azt kapjuk, hogy a háromszög egyenlőszárú. **(1 pont)**

Következésképpen CF a DP felezőmerőlegese. Mivel F a DP szakasz felezőpontja és FM párhuzamos a DK egyenessel, ezért FM középvonal az PKD háromszögben, azaz

$$\frac{FM}{DK} = \frac{1}{2}.$$

(2 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás a b) alpontra. Hasonlóan mint a fenti megoldásban, jelöljük a $\widehat{DAC}$ szöget α-val. Legyen ADC derékszögű háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva

$$AC \cdot CD = AD \cdot CF.$$

Ugyanabban a háromszögben

$$\sin \alpha = \frac{CD}{AD}, \ \cos \alpha = \frac{AC}{AD},$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $CF = AD \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Az ADK derékszögű háromszögben, $\widehat{DAK} = 2\alpha$, azaz

$$\sin 2\alpha = \frac{DK}{AD}.$$

Felhasználva, hogy $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\begin{aligned} DK &= 2 \cdot AD \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= 2CF. \end{aligned}$$

Az ACM háromszögben $\widehat{FCM} = \widehat{FMC} = \alpha$, következik, hogy $FM = CF$. Tehát

$$\frac{FM}{DK} = \frac{CF}{2CF} = \frac{1}{2}.$$

■

3. feladat. Az asztalon egy sorban egymás mellett 77 doboz található. Bármelyik 5 egymást követő dobozban összesen 11 golyó van, a 77 dobozban összesen pedig 169 golyót helyeztek el.

a) Hány golyó lehet a középső dobozban?

b) Hány doboz lehet üres?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás. a) Legyen az első 5 dobozban rendre a, b, c, d, e darab golyó,

$$a + b + c + d + e = 11.$$

Ha a hatodik dobozban f darab golyó van, akkor

$$b + c + d + e + f = 11,$$

vagyis $f = a$. A gondolatmenetet folytatva a golyók száma az egyes dobozokban ötösével periodikus, és mivel a 77-nek az 5-ös maradéka 2, így a a, b-vel ér véget a sorozat.

(2 pont)

Mivel $77 = 15 \cdot 5 + 2$, így az első 75 dobozban a golyók száma összesen $15 \cdot 11 = 165$, ezért az utolsó két dobozban

$$a + b = 169 - 165 = 4.$$

De akkor $c + d + e = 11 - 4 = 7$. **(1 pont)**

Mivel a középső három doboz a 38., 39. és a 40., így ezekben a dobozokban $c + d + e = 7$ golyó van. De akkor a középső dobozban d darab golyó van, és d értéke lehet $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

(1 pont)

b) Az a) rész eredményei alapján 16-16 dobozban van a, illetve b darab golyó, és $15 - 15$ dobozban van c, d, illetve e darab golyó. **(1 pont)**

Tudjuk, hogy $a + b = 4$, illetve $c + d + e = 7$, vagyis a és b közül legfeljebb az egyik lehet 0, a c, d, e közül pedig legfeljebb kettő. Lehet, hogy nincs üres doboz, például ha az első öt dobozban a golyók száma rendre 1, 3, 1, 2, 4. Lehet 15 üres doboz, pl. 1, 3, 0, 3, 4. Lehet 16 üres doboz, pl. 0, 4, 1, 2, 4, lehet 30 üres doboz, pl. 1, 3, 0, 0, 7, lehet 31, pl. 0, 4, 1, 3, 4, végül lehet 46 üres doboz, pl. 0, 4, 0, 0, 7. (**3 pont**)

Az üres dobozok száma tehát lehet 0, 15, 16, 30, 31 és 46. (**1 pont**)

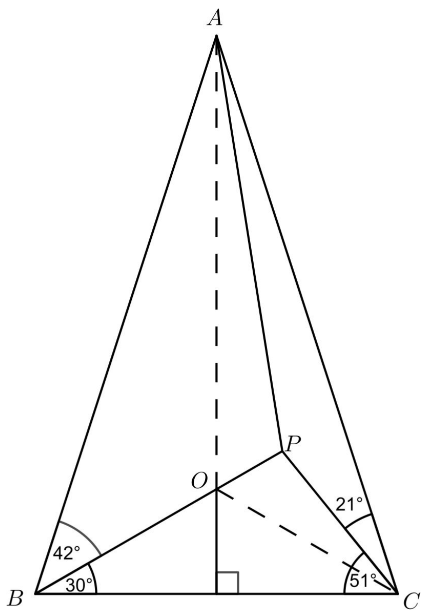
Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat. Az ABC egyenlő szárú háromszög belsejében adott egy P pont, amelyre $\widehat{PBA} = 42°$, $\widehat{PBC} = 30°$, $\widehat{PCA} = 21°$ és $\widehat{PCB} = 51°$. Határozd meg az $\widehat{APB}$ szög mértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Első megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Először $\widehat{PAC}$ mértékét határozzuk meg. Legyen $\widehat{PAC} = \alpha$. A feladat feltételei alapján $AB = AC$.

(1 pont)

Tekintsük a BC szakasz felezőmerőlegesét, amely átmegy az A csúcson és O pontban metszi a PB egyenest. **(1 pont)**

Így $OB = OC$, amiből következik, hogy

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30°.$$

(1 pont)

Tehát

$$\widehat{OCP} = 51° - 30° = 21°,$$

azaz CP felezi az $\widehat{OCA}$-t. **(1 pont)**

Mivel AO az ABC háromszög $\widehat{BAC}$ szögének szögfelezője, ezért

$$\widehat{BAO} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ,$$

ahonnan következik, hogy $\widehat{AOB} = 120^\circ$, és így $\widehat{AOP} = 60^\circ$. (**1 pont**)

Ugyanakkor $\widehat{POC}$ az OBC háromszög külső szöge, azaz

$$\widehat{POC} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

(**1 pont**)

A fenti állításokat figyelembe véve, kiderül, hogy AOC háromszögben, PO és PC szögfelezők, így PA is szögfelező. Emiatt

$$\widehat{PAC} = \frac{\widehat{OAC}}{2} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ.$$

(**2 pont**)

Tehát $\widehat{PAB} = 27^\circ$, ahonnan

$$\widehat{APB} = 180^\circ - (42^\circ + 27^\circ) = 111^\circ.$$

(**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. A Ceva-tétel trigonometrikus alakját használva, írhatjuk, hogy

$$\frac{\sin 42^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 52^\circ}{\sin 21^\circ} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(36^\circ - \alpha)} = 1.$$

Felhasználva, hogy $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ és $\sin 42^\circ = 2\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ$, a fenti azonosság (egyszerűsítés után) a következőképpen alakul:

$$4 \cdot \cos 21^\circ \cdot \sin 51^\circ \cdot \sin \alpha = \sin(36^\circ - \alpha).$$

A $2 \cdot \cos 21^\circ \cdot \sin 51^\circ$ szorzatot szinuszok összegévé alakítva, kapjuk, hogy

$$2\sin 72^\circ \sin \alpha + \sin \alpha = \sin(36^\circ - \alpha),$$

azaz

$$\begin{aligned}2\sin 72^\circ \sin\alpha &= \sin(36^\circ - \alpha) - \sin\alpha \\ &= 2\cdot\sin(18^\circ-\alpha)\cdot\cos 18^\circ \\ &= 2\cdot\sin(18^\circ-\alpha)\cdot\sin 72^\circ.\end{aligned}$$

Tehát $\sin\alpha = \sin(18^\circ - \alpha)$. Ekkor $\alpha = 18^\circ - \alpha$ összefüggésből kapjuk, hogy $\alpha = 9^\circ$. Innen a befejezés egyezik az első megoldással.

■

5. feladat. Adott az $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$, $n \geq 1$ sorozat. Igazold, hogy

$$\frac{n-1}{3(2n+1)} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k^2 \cdot x_{k+1}^2} \leq \frac{n-1}{3(n+2)}, \quad \text{bármely } n \geq 2 \text{ esetén!}$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A sorozat a következő rekurziós képlettel is megadható

$$x_1 = 1,\ x_n = \sqrt{n + x_{n-1}},\ \forall n \geq 2,$$

azaz

$$x_n^2 = n + x_{n-1}. \tag{2}$$

(2 pont)

A sorozat megadásából világos, hogy $x_n \geq 1$, $\forall n \geq 1$. Tehát $x_n^2 \geq n+1$. Felhasználva a fenti egyenlőtlenséget

$$x_k^2 x_{k+1}^2 \geq (k+1)(k+2),$$

(2 pont)

ami alapján

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k^2 x_{k+1}^2} &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{n-1}{3(n+2)}.\end{aligned}$$

(1 pont)

Másrészt, a matematikai indukció módszerével igazolható, hogy $x_n \leq n$, $\forall n \geq 1$. **(2 pont)**

Ekkor a (2) alapján $x_n^2 \leq 2n-1$, azaz

$$x_k^2 x_{k+1}^2 \leq (2k-1)(2k+1),$$

(1 pont)

így

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k^2 x_{k+1}^2} &\geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\ &= \frac{n-1}{3(2n+1)}.\end{aligned}$$

(**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

6. feladat. Legyen a és b két egész szám. Ha az a^4+b^4 összeget elosztjuk az a^2+b^2 összeggel, a hányados q, a maradék pedig r. Tudva, hogy $q^2+r=927$, határozd meg az (a,b) számpárokat!

Versenybizottság

Első megoldás. A maradékos osztás tétele alapján

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)\cdot q+r,\ \ 0\leq r<a^2+b^2. \tag{3}$$

(**1 pont**)

Mivel $q^2+r=927$, következik, hogy $q^2\leq 927$, azaz $q\leq 30$. (**1 pont**)

A továbbiakban adunk egy alsó becslést a q értékeire. A (3) alapján

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}=q+\frac{r}{a^2+b^2}<q+1.$$

Mivel

$$\frac{a^2+b^2}{2}\leq\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2},$$

(**1 pont**)

ezért

$$\frac{r}{2}<\frac{a^2+b^2}{2}<q+1,$$

(**1 pont**)

azaz $r < 2(q+1) \leq 62$. A $q^2 + r = 927$ összefüggés alapján

$$q^2 = 927 - r \geq 865.$$

(1 pont)

Tehát $q = 30$, és így $r = 27$. Ismét felhasználva az (3) összefüggést

$$a^4 + b^4 = 30(a^2 + b^2) + 27,$$

vagy

$$(a^2 - 15)^2 + (b^2 - 15)^2 = 477.$$

(1 pont)

A két négyzet közül az egyik biztosan nagyobb mint $\frac{477}{2}$. Tehát a négyzetszámok 239 és 477 között: 256, 289, 324, 361, 400, 441. Ezek közül csak a 441 a megfelelő (ki kell egészítenünk egy teljes négyzettel a 477-ig). Így

$$a^2 - 15 = \pm 21 \text{ vagy } a^2 - 15 = \pm 6,$$

és hasonlóan a b-re. Tehát a megoldások:

$$(a, b) \in \{(-3, -6), (-3, 6), (3, -6), (3, 6), (-6, -3), (-6, 3), (6, -3), (6, 3)\}.$$

(3 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hasonlóan mint fent, belátható, hogy $q \leq 30$. Legyen $a^2 = x$ és $b^2 = y$, ahol x, y természetes számok. A $q^2 + r = 684$ feltételből kifejezve az r-t, és behelyettesítve az (3) összefüggésbe a következő q-ban másodfokú egyenletet kapjuk:

$$q^2 - (x + y)q + (x^2 + y^2 - 927) = 0.$$

Ennek az egyenletnek van megoldása, ezért az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív. Azaz

$$\Delta_q = -3x^2 + 2xy + 3708 - 3y^2 \geq 0.$$

Látható, hogy a fenti diszkrimináns szintén egy másodfokú egyenlőtlenség x-ben vagy y-ban (szimmetrikus). Az általánosság megcsorbítása nélkül tekintsük most x-ban másodfokú egyenlőtlenségnek. Tehát az egyenlőtlenség diszkriminánsa

$$\Delta_x = 4 \cdot \left(11124 - 8y^2\right)$$

nemnegatív kell legyen, ellenkező esetben a $\Delta_q < 0$. Tehát

$$y^2 \leq 1390,$$

azaz $y \leq 36$. A szimmetria miatt $x \leq 36$. Így $r < x + y \leq 72$, következik, hogy

$$q^2 = 927 - r \geq 855.$$

Tehát $q = 30$, $r = 27$ és a megoldás további része az előző megoldáshoz hasonló.

■