XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

X. osztály

1. feladat. A p, q, és r páronként különböző prímszámok. Igazold, hogy

$$15(pq + pr + rq) < 16pqr.$$

dr. Szász Róbert, Marosvásárhely

Megoldás. Az igazolandó egyenlőtlenséget elosztva a pqr szorzattal kapjuk, hogy

$$\frac{pq + pr + rq}{pqr} < \frac{16}{15}$$

ami az $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{16}{15}$ egyenlőtlenséggel egyenértékű. **(3 pont)**

Az általánosság megsértése nélkül féltételezhetjük, hogy $p < q < r$. **(1 pont)**

Ekkor $p \geq 2,\ q \geq 3,\ r \geq 5$. **(2 pont)**

Innen pedig az következik, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30} < \frac{32}{30} = \frac{16}{15}.$$

(3 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. a) Igazold, hogy az $x^2 + y^2 = 650$ egyenletnek van megoldása a természetes számok halmazán!

b) Bizonyítsd be, hogy 2019^{2019} felírható három természetes szám négyzetösszegeként!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. a) A megoldások: $25^2 + 5^2 = 650$, vagy $11^2 + 23^2 = 650$. **(2 pont)**

b) Az a) pont alapján $2019 - 650 = 1369 = 37^2$ és $25^2 + 5^2 = 650$ tehát $2019 = 5^2 + 25^2 + 37^2$ vagy analóg módon írhatjuk, hogy $2019 - 650 = 1369 = 37^2$ és $11^2 + 23^2 = 650$ tehát

$$2019 = 11^2 + 23^2 + 37^2$$

(**1 pont**)

és ebből az következik, hogy

$$\begin{aligned} 2019^{2019} &= 2019 \cdot 2019^{2018} = (11^2 + 23^2 + 37^2)2019^{2018} && (\mathbf{3pont}) \\ &= 11^2 \cdot 2019^{2\cdot 1009} + 23^2 \cdot 2019^{2\cdot 1009} + 37^2 \cdot 2019^{2\cdot 1009} && (\mathbf{1pont}) \\ &= \left(11 \cdot 2019^{1009}\right)^2 + \left(23 \cdot 2019^{1009}\right)^2 + \left(37 \cdot 2019^{1009}\right)^2. && (\mathbf{2pont}) \end{aligned}$$

Vagy analóg módon $2019 = 5^2 + 25^2 + 37^2$ felbontás esetén.

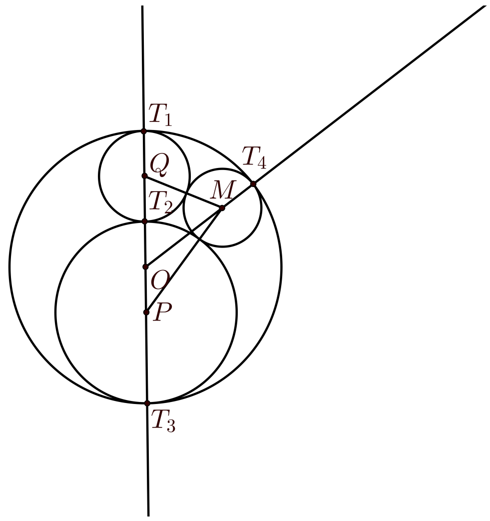
Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat. Az O középpontú, 9 egység sugarú kört belülről érintő, P és Q középpontú körök kivülről érintik egymást. Az O, P és Q pontok kollineárisak és a két belső kör sugarának aránya $\frac{1}{2}$. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a három adott kört három különböző pontban érinti?

Szabó Magda, Szabadka

Első megoldás. A feladat feltételei az alábbi ábrán szemléltethetőek



(1 pont)

Jelölje M a keresett kör középpontját és r a sugarát, T_1, T_2, T_3 az érintési pontokat (lásd ábra), valamint R_1 a Q középpontú kör sugarát, R_2 a P középpontú kör sugarát, R az O középpontú kör sugarát. A feladat feltételei alapján $T_1T_3 = 2R = T_1T_2 + T_2T_3 = 2R_1 + 2R_2$, tehát

$$9 = R = R_1 + R_2.$$

Mivel $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1}{2}$, ezért $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = \dfrac{1}{3}$, amiből $R_1 = 3$, így $R_2 = 2R_1 = 6$. **(1 pont)**

Az ábra jelöléseit használva

$$QM = R_1 + r = 3 + r,$$

valamint

$$PM = R_2 + r = 6 + r$$

és

$$PQ = R_1 + R_2 = 9.$$

Ugyanakkor

$$OM = OT_4 - MT_4 = R - r = 9 - r,$$

és

$$OQ = R - R_1 = 6$$

végül

$$OP = R - R_2 = 3$$

(**2 pont**)

Ugyanakkor

$$T_{MPQ} = T_{MOQ} + T_{MOP},$$

továbbá

$$\frac{T_{MOQ}}{T_{MOP}} = \frac{2}{1},$$

mert a két háromszög magassága ugyanakkora, és $\dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{6}{3} = 2.$ (**1 pont**)

$$K_{MOQ} = MO + OQ + MQ = 9 - r + 6 + 3 + r = 18$$

és

$$K_{MOP} = MO + OP + MP = 9 - r + 3 + 6 + r = 18$$

(**1 pont**)

Ekkor a Héron képletet alkalmazve

$$\frac{\sqrt{9(9-9+r)(9-6)(9-3-r)}}{\sqrt{9(9-9+r)(9-3)(9-6-r)}} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 6 - r = 8(3 - r) \Leftrightarrow r = \frac{18}{7}.$$

(**3 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. Koszinusz tételt alkalmazva a MOP háromszögben

$$MO^2 = MP^2 + OP^2 - 2MP \cdot OP \cdot \cos\widehat{P}.$$

Tehát

$$\cos \widehat{P} = \frac{MP^2 + OP^2 - MO^2}{2MP \cdot OP} \tag{1}$$

Analóg módon az MPQ háromszögben

$$MQ^2 = MP^2 + QP^2 - 2MP \cdot QP \cdot \cos \widehat{P},$$

azaz

$$\cos \widehat{P} = \frac{MP^2 + QP^2 - MQ^2}{2MP \cdot QP} \tag{2}$$

Ekkor az (1) és (2) összefüggések alapján

$$\frac{MP^2 + OP^2 - MO^2}{OP} = \frac{MP^2 + QP^2 - MQ^2}{QP}$$

Tehát

$$\frac{(6+r)^2 + 3^2 - (9-r)^2}{3} = \frac{(6+r)^2 + 9^2 - (3+r)^2}{9}.$$

és így $r = \frac{18}{7}$. ■

Harmadik megoldás. Stewart tételét alkalmazva az MPQ háromszögben

$$MQ^2 \cdot OP + MP^2 \cdot OQ - MO^2 \cdot QP = QO \cdot OP \cdot QP$$

tehát

$$(3+r)^2 \cdot 3 + (6+r)^2 \cdot 6 - (9-r)^2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 \cdot 9$$

és így $r = \dfrac{18}{7}$. ■

4. feladat. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatot úgy képezzük, hogy a nemnulla természetes számokból sorban leírunk egyet, kihagyunk egyet, leírunk kettőt, kihagyunk kettőt,...., leírunk n-et, kihagyunk n-et és így tovább. Az így kapott sorozatban szerepel-e az 1029, illetve a 2019? Ha valamelyik szerepel, akkor ez hányadik tagja a sorozatnak?

dr. Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás. Csoportosítsuk az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat elemeit, úgy ahogy képeztük a sorozatot: $1, 2, \dots n$ elemű csoportokra:

$$1; \quad 3,4; \quad 7,8,9; \quad 13,14,15,16; \quad \dots$$

Észrevehetjük, hogy az egyes $1, 2, 3, \dots n$ elemű csoportokban az utolsó elem rendre $1, 4, 9, \dots n^2$ lesz.

(1 pont)

Valóban, ha az n-edik csoport utolsó eleme n^2, akkor ezután kihagyunk n számot, majd leírunk $n+1$ számot, akkor a következő leírt csoport utolsó eleme $n^2 + n + n + 1 = (n+1)^2$ lesz. **(2 pont)**

Nézzük meg, hogy 1029 és a 2019 előtt és után milyen négyzetszámok állnak: $32^2 = 1024$, ez szerepel a sorozatban a 32. csoport utolsó helyén és ezután kimarad 32 szám. Az 1029 ezek között van, tehát nem szerepel a sorozatban. **(2 pont)**

$44^2 = 1936$, $\quad 45^2 = 2025$, ezért az 1936 szerepel a sorozatban, a 44. csoport utolsó helyén.

(1 pont)

Ezután kimarad 44 szám: az $1937, 1938, \dots 1980$ számok. A következő 45 szám: $1981, 1982, \dots 2025$ újra eleme lesz a sorozatnak, tehát a 2019 szerepel a sorozatban. **(1 pont)**

Az 1936 az $1 + 2 + 3 + \ldots + 44 = 990$-edik eleme lesz a sorozatnak. **(1 pont)**

A következő, a 991-edik elem az 1981, a 992-edik az 1982, ….

$2019 - 990 = 1029$, tehát a 2019 szám a sorozatnak az 1029. eleme. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

5. feladat. Egy szabályos háromszög oldala 2019 egység hosszú. A háromszöget oldalaival párhuzamos egyenesekkel 1 egység oldalú szabályos háromszögekre osztottuk. Ezt követően a rácsvonalak mentén a háromszögből a lehető legtöbb olyan paralelogrammát vágtuk ki, amelynek oldalai 1 és 2 egység hosszúak. Hány paralelogrammát vágtunk ki?

Erdős Gábor, Nagykanizsa és Fedorszki Ádám, Beregszász

Megoldás. Színezzük a háromszögeket sakktábla-szerűen szürkére vagy fehérre: a csúcsoknál lévők legyenek szürkék, az oldalszomszédosak pedig különböző színűek. **(1 pont)**

A szürke háromszögek száma $1 + 2 + \ldots + 2019 = \frac{2019 \cdot 2018}{2} = 2037171$, **(1 pont)**

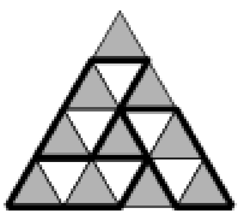
a fehér háromszögek száma $1 + 2 + \ldots + 2018 = \frac{2018 \cdot 2017}{2} = 2035153$. **(1 pont)**

Mivel minden kivágott paralelogramma 2 fehér és 2 fekete háromszöget tartalmaz, így a paralelogrammák száma nem lehet több, mint $\left[\frac{2035153}{2}\right] = 1017576$.

(1 pont)

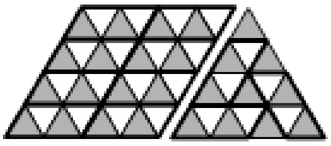
Azt kell belátnunk, hogy erre létezik konstrukció. Olyan kivágást kell találnunk, amelyben mindössze 1 olyan fehér háromszög van, amelyet egyik kivágott paralelogramma sem tartalmaz. Jelöljük n-nel azt a számot, ahány részre osztjuk a háromszög oldalait. Az első ábrán azt látjuk, hogy $n = 4$-re van olyan konstrukció, amelyben minden fehér háromszöget felhasználunk valamelyik paralelogrammához.

(1 pont)



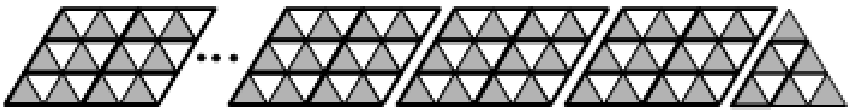
Nézzük most $n = 8$-ra, és azt nézzük meg, hogy az előbbi konstrukciót hogyan lehet bővíteni 4 sorral úgy, hogy továbbra is mindegyik fehér háromszöget felhasználjuk. Valójában elég, ha ezt a 4 sort nézzük. Ez pedig trapéz alakú, amelyet feloszthatunk egy 4 egység hosszú paralelogrammára és egy 4 egység oldalú szabályos háromszögre. Mivel utóbbiról az előbb láttuk, hogy szétvágható megfelelő módon, már csak a paralelogrammát kell felvágnunk. Ez viszont nyilván megtehető, hiszen minden sorból 2-2 paralelogramma vágható ki. Ennek a 4 sornak a feldarabolása látható a második ábrán.

(**1 pont**)



Ezzel a módszerrel, teljes indukcióval belátható, hogy bármely $n = 4k$ oldalú háromszög feldarabolható úgy, hogy valamennyi fehér háromszöget felhasználjuk. Ha ugyanis $n = 4k$ -ra igaz az állítás, akkor $n = 4(k+1) = 4k+4$ oldalúra az utolsó 4 sort az előbbi konstrukcióval daraboljuk. Szétvághatjuk ugyanis a sort k darab olyan paralelogrammára, amelyeket az előző ábrán látható módon 8-8 paralelogrammára tudunk vágni, és a végén marad egy 4 egység oldalú szabályos háromszög, ami szintén megfelelően feldarabolható. (**2 pont**)

Ezekkel a lépésekkel el lehet jutni addig, hogy az első 2016 sor feldarabolható úgy, hogy minden fehér háromszöget felhasználunk. Nézzük végül az utolsó 3 sort. Ez feldarabolható 504 darab olyan paralelogrammára, melyekből 6-6 paralelogramma vágható ki, és a végén marad egy 3 egység oldalú háromszög. Ebben 3 fehér háromszög van, ahogy az ábrán látható, belőle még 1 paralelogramma vágható ki, így valóban mindössze egyetlen olyan fehér háromszög van, amelyet egyik paralelogramma sem tartalmaz. (**1 pont**)



Hivatalból (**1 pont**)

■

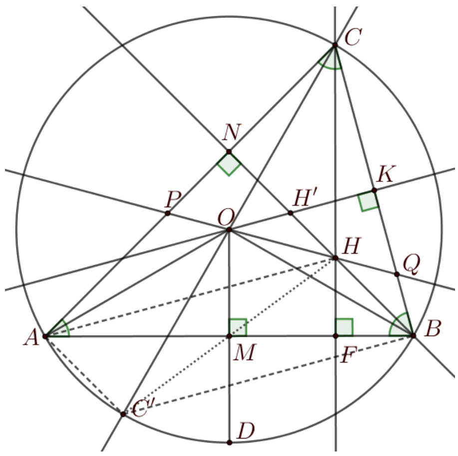
6. feladat. Az ABC háromszögben $\widehat{BAC} = 45°$ és $\widehat{CBA} = 75°$. Jelöljük O-val a háromszög körülírt körének középpontját és H-val a háromszög magasságpontját. A HO egyenes a CA és CB oldalakat rendre a P, illetve Q pontokban metszi.

a) Igazold, hogy az O pont távolsága az AB oldaltól feleakkora, mint a H pont távolsága a C csúcstól!

b) Mutasd ki, hogy a CPH és CQO háromszögeknek közös a magasságpontjuk!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás. a) Legyen $OM \perp AB, M \in AB$. Jelöljük a C'-tel a C pont átmérősen ellentett pontját.



(1 pont)

Igazoljuk, hogy $AHBC'$ paralelogramma. Mivel H magasságpont, $BH \perp AC$. Ugyanakkor $\widehat{C'AC} = 90°$ (félkörbe írt szög). $BH \perp AC, C'A \perp AC \Rightarrow BH \| C'A$. Hasonlóan $AH \perp BC, C'B \perp BC \Rightarrow AH \| C'B$, tehát $AHBC'$ paralelogramma. **(1 pont)**

A paralelogramma átlói felezik egymást, vagyis $C'H$ átmegy az AB szakasz M felezőpontján. A $CC'H$ háromszögben OM középvonal, $OM = \dfrac{CH}{2}$. **(1 pont)**

b) AC körív mértéke $= 2 \cdot \widehat{ABC} = 150°$, következik $\widehat{AOC} = 150°$, így az AOC egyenlőszárú háronmszögben $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = 15°$. Ekkor $\widehat{OAM} = 30°$ és az OMA derékszögű háromszögben $OM = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$. Az *a)* alpont alapján $OM = \dfrac{CH}{2}$, ahonnan $CH = R$ (1). **(1 pont)**

A CFB derékszögű háromszögben $\widehat{FCB} = 15°$, ahol F a C-ből húzott magasság talppontja, következésképpen $\widehat{OCH} = 30°$. A COB egyenlőszárú derékszögű háromszögben $CB = CO\sqrt{2} = R\sqrt{2}$ és $CK = \dfrac{CB}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **(1 pont)**

CNH derékszögű háromszögben $\widehat{NCH} = 45°$, ezért a háromszög egyenlőszárú. Ugyanakkor (1) alapján $CH = R$, tehát $CN = NH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **(1 pont)**

A $CH'N$ és $CH'K$ háronszögek egybevágóak. Ennek alapján CNK háromszög egyenlőszárú háromszög és CH' szögfelező a háromszögben. Így $\widehat{OCH'} = \widehat{HCH'} = 15°$, tehát a CH' szögfelező a COH háromszögben. **(1 pont)**

A COH háromszögben $OC = CH = R$, vagyis a háromszög egyenlőszárú, CH' szögfelező magasság is a háromszögben, következtetésképpen $CH' \perp PQ$. (**1 pont**)

Így a CPH háromszögben CH' és HH' magasságok, így H' a háromszög magasságpontja. Hasonlóan a CQO háromszögben OH' és CH' magasságok, tehát H' a CQO háromszögnek is magasságpontja. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■