XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

IX. osztály

1. feladat. Egy ókori világváros alapításának évszáma egy háromjegyű szám a tízes számrendszerben. Ha az utolsó számjegy eltávolításával kapott kétjegyű számból kivonjuk az első számjegy eltávolításával kapott kétjegyű számot, akkor az eredmény 22. Az évszám számjegyeinek különböző sorrendjeként keletkezett 6 darab háromjegyű szám összege 3330. Melyik ez a szám, ha az évszám számjegyei négyzetének összege 83?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Legyen a keresett szám $\overline{abc}$ alakú, ahol a, b, c számjegyek a tízes számrendszerben. Az első feltétel értelmében $10a + b - 10b - c = 22$, vagyis $10a - 9b - c = 22$. **(1 pont)**

Ekkor a számjegyek különböző sorrendjeként keletkezett 6 darab szám összege

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3330.$$

(1 pont)

Azt kapjuk, hogy

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + \ldots = 3330.$$

Innen kiemelve rendre a, b és c-t következik, hogy

$$222(a + b + c) = 3330,$$

vagyis, hogy $a + b + c = 15$. **(2 pont)**

Utolsó feltételként felírható, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 83$.

Összesítve tehát

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 83 \\ 10a - 9b - c = 22. \end{cases}$$

(1 pont)

Mivel a, b, c számjegyek, az első két egyenletből kapjuk, hogy ezek csak a $3, 5, 7$ számjegyek lehetnek valamilyen sorrendben (teljesül, hogy $3 + 5 + 7 = 15$ és $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$). A harmadik egyenlet alapján pedig ezek közül csak a 753 megfelelő.

Tehát az ókori város alapításának az éve 753. (**4 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. Kr.e. 753. április 21-én alapította meg a legenda szerint Romulus és Remus Róma városát.

2. feladat. Egy táblára felrajzoltunk 2010 darab zöld színű, 2016 darab piros és 2019 darab kék színű négyzetet. Egy lépésben két különböző színű négyzetet letörlünk és helyette a harmadik színű négyzetből rajzolunk fel egyet. Igazold, hogy ezen eljárás ismétlésével elérhetjük, hogy csak egyféle színű négyzet maradjon a táblán! Lehet-e ez a szín a kék, hát a piros, hát a zöld?

dr. Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás. A megoldás két lépésben történik.

I. lépés: Töröljünk le egymás után háromszor egy piros és egy kék négyzetet, zöldet rajzolunk helyettük. Most lesz 2013 darab zöld, 2013 darab piros és 2016 darab kék. Ezután 2013-szor töröljünk le egy zöldet és egy pirosat, mindig kék lesz helyettük. Így a végén csak kék négyzetek maradnak.

(**4 pont**)

II. lépés: Jelölje a táblán lévő zöld négyzetek számát z, a pirosakét p és a kékekét k. Minden lépésnél z, p és k is 1-gyel változik (kettő közülük csökken 1-gyel, egy pedig nő 1-gyel). Ezért bármelyik két szám öszege vagy nem változik, vagy 2-vel csökken. Így bármelyik két szám összege, ha páros volt, mindig páros is marad, ha páratlan volt, akkor páratlan is marad. (**3 pont**)

($\star$).

Eredetileg $z + p$ páros, $z + k$ és $p + k$ páratlan volt, és ez végig így is marad.

Ha a végén csak zöld maradna, akkor $p + k = 0 + 0$ páros lenne, de ez nem lehet.

Ha a végén csak piros maradna, akkor $z + k = 0 + 0$ páros lenne, de ez sem lehet.

Tehát csak kék lehet a megmaradó szín. (**2 pont**)

Ha valaki az I.-ről, vagy ahhoz hasonló konkrét eljárásokról akarja megmutatni, hogy csak kék színű négyzet maradhat, de ($\star$)-hoz hasonló invariáns mennyiséget nem talál, akkor a II. részre legfeljebb 2 pontot kaphat.

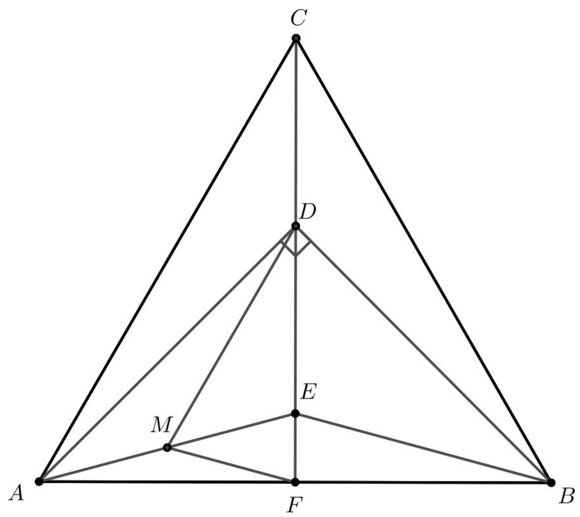
Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja F. Legyen D a CF szakasz azon belső pontja, amelyre $\widehat{ADB}$ derékszög. Legyen E a DF szakasz azon belső pontja, amelyre a CD és DE szakaszok hossza egyenlő. Határozd meg az $\widehat{AEB}$ mértékét!

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Első megoldás. Tekintsük a következő ábrát.



(1 pont)

Legyen a háromszög oldalának a hossza 2 egység és az AE szakasz felezőpontja M. **(2 pont)**

Az MD szakasz középvonal az AEC háromszögben, így hossza 1. **(2 pont)**

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így $AF = FD = 1$. **(1 pont)**

Következésképpen FDM háromszög is egyenlőszárú és $\widehat{MDF} = \widehat{ACF} = 30°$. Így $\widehat{MFD} = 75°$. Az AFE háromszög köré írt kör középpontja M, így EMF háromszög is egyenlőszárú. **(2 pont)**

Tehát $\widehat{AEF} = 75°$. Végezetül

$$\widehat{AEB} = 2 \cdot \widehat{AEF} = 150°.$$

(1 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Legyen $AB = 2a$, tehát $AF = FB = a$ és $CF = a\sqrt{3}$. Mivel ADB háromszög derékszögű és egyenlőszárú, ezért $DF = a$. Ugyanakkor $CD = CF - DF = a(\sqrt{3} - 1)$. Ebből következik, hogy $DE = a(\sqrt{3} - 1)$. Tehát

$$EF = DF - DE = a - a(\sqrt{3} - 1) = a(2 - \sqrt{3}).$$

Az AFE háromszögben felírjuk az $\widehat{AEF}$ tangensét és azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}(\widehat{AEF}) = \frac{AF}{EF} = \frac{a}{a(2 - \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

Mivel $\operatorname{tg}(\widehat{AEB}) = \operatorname{tg}(2 \cdot \widehat{AEF})$, ezért

$$\operatorname{tg}(\widehat{AEB}) = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{1 - (2 + \sqrt{3})^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tehát $\widehat{AEB} = 150°$. ■

4. feladat. Határozd meg az összes olyan $n = p \cdot q \cdot r$ prímtényezős felbontású számot, melyre

$$\frac{q}{p-1} = \frac{r}{p+1} + 1.$$

Fedorszki Ádám, Beregszász

Első megoldás. A felírt egyenletből kifejezve q-t azt kapjuk, hogy $q = \frac{(p-1)r}{p+1} + p - 1$, ahonnan

$$q = p + r - 1 - \frac{2r}{p+1}. \tag{1}$$

Mivel q egy természetes szám ezért a $\frac{2r}{p+1}$ tört értéke is egy természetes szám, tehát $(p+1)$ osztja a $2r$-t. A $2r$-nek az osztói $1, 2, r$ és $2r$. Mivel $p+1 \geq 3$ és p prím, ezért $p+1 = r$ vagy $p+1 = 2r$.

Ha $p+1 = r$, akkor $p = 2$ és $r = 3$, mivel p és r prím. Innen pedig $q = 2$.

Ha $p+1 = 2r$ vagyis $p = r-1$, akkor visszahelyettesítve p-t az (1)-es kifejezésbe kapjuk, hogy $q = 3r - 3$, ami biztosan osztható 3-mal, tehát $q = 3$. Innen pedig $p = 3$ és $r = 2$.

Két megoldás van a $p = q = 2$, $r = 3$ és a $p = q = 3$, $r = 2$. Így a keresett számok 12 és 18. ■

Második megoldás. A felírt egyenlet egyenértékű a következővel

$$(p+1)q = r(p-1) + p^2 - 1.$$

(**1 pont**)

Innen következik, hogy $p+1$ osztja az $r(p-1)$-et, de ugyanakkor $p+1$ osztja az $r(p+1)$-et is, így ezek különbsége is osztható $p+1$-gyel. Tehát azt kapjuk, hogy $p+1$ osztja a $2r$-t. (**3 pont**)

A $2r$-nek az osztói $1, 2, r$ és $2r$. Mivel $p+1 \geq 3$ és p prím, ezért $p+1 = r$ vagy $p+1 = 2r$. (**2 pont**)

Ha $p+1 = r$, akkor $p = 2$ és $r = 3$, mivel p és r prím. Innen pedig $q = 2$. (**1 pont**)

Ha $p+1 = 2r$ vagyis $p = r-1$, akkor visszahelyettesítve p-t az (1)-es kifejezésbe kapjuk, hogy $q = 3r - 3$, ami biztosan osztható 3-mal, tehát $q = 3$. Innen pedig $p = 3$ és $r = 2$. (**1 pont**)

Két megoldás van a $p = q = 2$, $r = 3$ és a $p = q = 3$, $r = 2$. Így a keresett számok 12 és 18.

(**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

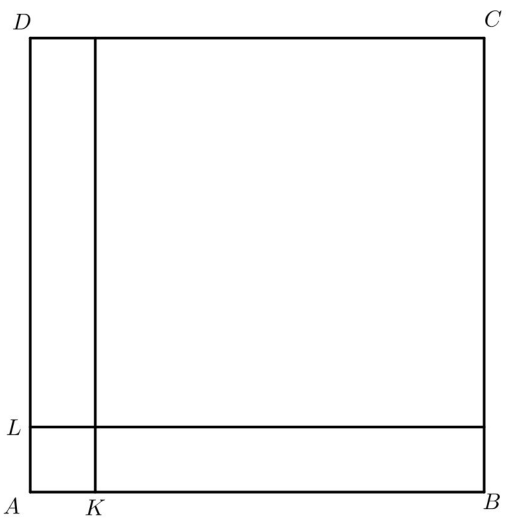
■

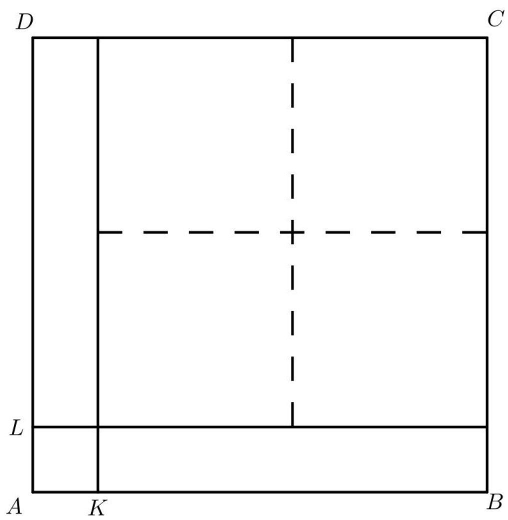
5. feladat. Legyen n egy tetszőleges 5-nél nagyobb egész szám. Igazold, hogy bármely négyzet felbontható n darab, legfeljebb 2 különböző méretű, négyzetre!

dr. Gecse Frigyes, Kisvárda

Megoldás. Tekintünk egy egységnyi oldalhosszúságú $ABCD$ négyzetet.

I. eset: Ha n páros, vagyis $n = 2k, k \geq 3$, akkor vegyük fel a négyzet AB és AD oldalain az A csúcstól $\frac{1}{k}$ távolságra a K és L pontokat. Húzzuk meg ezeken a pontokon át a négyzet oldalaival párhuzamos szakaszokat. Így két négyzetet és két téglalapot kapunk. A téglalapokat tovább osztjuk $(k-1)$ darab $\frac{1}{k}$ oldalhosszúságú négyzetre. Kapunk összesen $k - 1 + k - 1 + 1$ darab $\frac{1}{k}$ oldalhosszúságú négyzetet és egy darab $1 - \frac{1}{k}$ oldalhosszúságú négyzetet. Tehát az eredeti négyzetet $(2k - 1) + 1 = 2k$ darab négyzetre bontottuk. **(4 pont)**





II. eset: Ha n páratlan, vagyis $n = 2k + 1, k \geq 3$, akkor $n - 3 = 2 \cdot (k - 1)$ páros. Az előző eljárás alapján $n - 3 = 2 \cdot (k - 1)$ négyzetre felbontjuk az eredeti négyzetet. Az utolsó lépésben az $1 - \frac{1}{k-1}$ oldalhosszúságú négyzetet két szimmetria tengelyével felosztjuk négy darab négyzetre. Így az eddig meglévő négyzetek száma 3-mal növekszik. Tehát $2(k-1)+3 = 2k+1$ darab négyzetünk lesz. Ezek oldalhosszúságai $\frac{1}{k-1}$ illetve $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{k-1})$. **(5 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

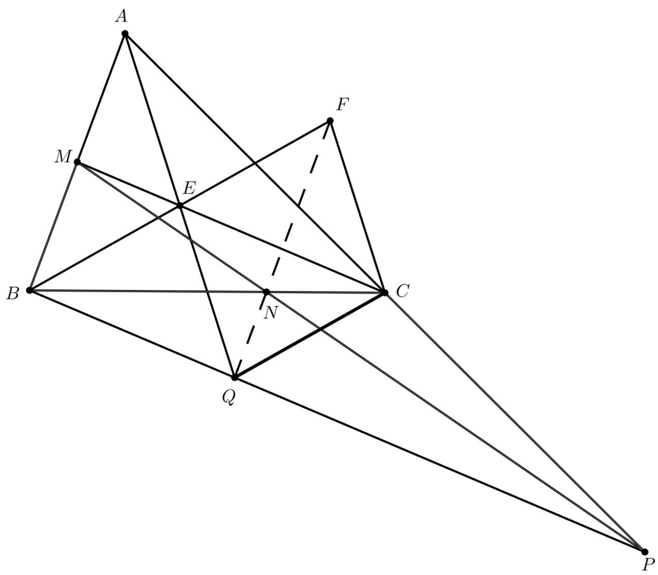
6. feladat. Adott az ABC háromszög. Legyen M az AB oldal felezőpontja. A BC oldalon felvesszük az N pontot, úgy, hogy $T_{MBN_\triangle} = T_{CPN_\triangle}$, ahol $\{P\} = MN \cap AC$, C az AP szakasz belső pontja. Az N ponton át az AB-hez húzott párhuzamos a BP egyenest Q-ban metszi, a C ponton át az AQ-hoz húzott párhuzamos a BE egyenest F-ben metszi, ahol $\{E\} = AQ \cap MC$.

a.) Igazold, hogy $BECQ$ paralelogramma!

b.) Igazold, hogy Q, N, F kollineáris pontok!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. a.) Mivel $T_{MBN_\triangle} = T_{CPN_\triangle}$, ezért $T_{MBP_\triangle} = T_{CPB_\triangle}$, ahonnan következik, hogy MC párhuzamos BP-vel. **(2 pont)**



(1 pont)

Tehát MC középvonal az APB háromszögben, így C az AP oldal felezőpontja. Következésképpen BC és PM oldalfelezők az ABP háromszögben. Így N az ABP háromszög súlypontja. Ennek értelmében (mivel $NQ||MB$)

$$\frac{BQ}{QP} = \frac{MN}{NP} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont)

Következik, hogy $BQ = \frac{QP}{2}$. Mivel EC párhuzamos PQ-val és C az AP oldal felezőpontja, ezért EC középvonal az AQP háromszögben, tehát $EC = \frac{QP}{2}$. Így

$$AE = EQ. \tag{2}$$

Innen következik, hogy $BQ = EC$ és mivel CE párhuzamos BQ-val, ezért $BECQ$ egy paralelogramma.

(**1 pont**)

b.) Mivel QE párhuzamos FC-vel és EF párhuzamos QC-vel, ezért $CQEF$ paralelogramma, vagyis $CQ = EF$. Továbbá az előző alpont alapján teljesül, hogy $CQ = BE$, tehát

$$BE = EF. \tag{3}$$

(**2 pont**)

A (2) és (3) alapján következik, hogy $ABQF$ négyszög átlói felezik egymást, tehát az $ABQF$ négyszög paralelogramma. Következésképpen QF párhuzamos AB-vel. De mivel QN is párhuzamos AB-vel, ezért Q, N, F kollineáris pontok. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■