XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

XII. osztály

1. feladat. Adott $a > 0$ esetén oldd meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{a} = \sqrt{(a+y)(a+z)} \\ (\sqrt{y}+\sqrt{z})\sqrt{a} = \sqrt{(a+z)(a+x)} \\ (\sqrt{z}+\sqrt{x})\sqrt{a} = \sqrt{(a+x)(a+y)} \end{cases}$$

2. feladat. Határozd meg a p és q prímszámokat, ha $p^2 + q^3$ köbszám!

3. feladat. Legyen $\mathcal{P}$ egy parabola és e egy, a parabolát nem metsző, annak szimmetriatengelyére merőleges egyenes. Az e egyenes tetszőleges A pontjából érintőket húzunk a parabolához. Igazold, hogy mialatt az A pont bejárja az e egyenest, az érintési pontokat összekötő egyenesek átmennek egy rögzített ponton!

4. feladat. a) Kiszínezhető-e egy egyenes minden pontja két színnel úgy, hogy minden egységtávolságra fekvő pontpár különböző színű legyen?

b) Bizonyítsd be, hogy bárhogy színeznénk két metsző egyenes összes pontját két színt használva, mindig lesz legalább két, adott d távolságra fekvő azonos színű pont, bármilyen d távolság esetén!

5. feladat. Legyen $x > 1$ valós szám. Igazold, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[x+\frac{k-1}{n}\right]} = \frac{n\cdot\big([x]+1\big)-\big[n\cdot\{x\}\big]}{[x]\cdot\big([x]+1\big)}$$

6. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszög köré írt körön az A csúcspont átmérősen ellentett pontja D, a háromszög magasságpontja a H pont, a háromszög A csúcsánál levő belső szög $60°$-os. A H ponton átmenő, a BC oldallal párhuzamos egyenes az AB és AC oldalakat rendre az E és F pontokban metszi. A DE és DF egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körével való második metszéspontjai rendre a K és M pontok. Határozd meg a DEF és DKM háromszögek kerületeinek arányát!

Megjegyzések:

- Munkaidő: 4 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont kapható.