XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$ függvény. Számítsd ki az

$$f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \ldots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2019}{2019}\right)$$

összeg értékét!

2. feladat. A C-ben derékszögű ABC háromszög CB befogóján úgy vesszük fel a D és E pontokat, hogy $\widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAB}$. Legyen F a C csúcsból az AD szakaszra húzott merőleges talppontja, míg a D és F pontokból az AB átfogóra húzott merőlegesek talppontjai rendre K és L. Legyen M a CK és FL szakaszok metszéspontja.

a) Igazold, hogy az M pont rajta van az AE egyenesen!

b) Számítsd ki az $\dfrac{FM}{DK}$ arány értékét!

3. feladat. Az asztalon egy sorban egymás mellett 77 doboz található. Bármelyik 5 egymást követő dobozban összesen 11 golyó van, a 77 dobozban összesen pedig 169 golyót helyeztek el.

a) Hány golyó lehet a középső dobozban?

b) Hány doboz lehet üres?

4. feladat. Az ABC egyenlő szárú háromszög belsejében adott egy P pont, amelyre $\widehat{PBA} = 42°$, $\widehat{PBC} = 30°$, $\widehat{PCA} = 21°$ és $\widehat{PCB} = 51°$. Határozd meg az $\widehat{APB}$ szög mértékét!

5. feladat. Adott az $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{... + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$, $n \geq 1$ sorozat. Igazold, hogy

$$\frac{n-1}{3(2n+1)} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k^2 \cdot x_{k+1}^2} \leq \frac{n-1}{3(n+2)}, \quad \text{bármely } n \geq 2 \text{ esetén!}$$

6. feladat. Legyen a és b két egész szám. Ha az $a^4 + b^4$ összeget elosztjuk az $a^2 + b^2$ összeggel, a hányados q, a maradék pedig r. Tudva, hogy $q^2 + r = 927$, határozd meg az (a, b) számpárokat!

Megjegyzések:

- Munkaidő: 4 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont kapható.