



XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

X. osztály

1. feladat. A p, q , és r páronként különböző prímszámok. Igazold, hogy

$$15(pq + pr + rq) < 16pqr.$$

2. feladat. a) Igazold, hogy az $x^2 + y^2 = 650$ egyenletnek van megoldása a természetes számok halmazán!

b) Bizonyítsd be, hogy 2019^{2019} felírható három természetes szám négyzetösszegeként!

3. feladat. Az O középpontú, 9 egység sugarú kört belülről érintő, P és Q középpontú körök kívülről érintik egymást. Az O , P és Q pontok kollineárisak és a két belső kör sugarának aránya $\frac{1}{2}$.

Mekkora annak a körnek a sugara, amely a három adott kört három különböző pontban érinti?

4. feladat. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatot úgy képezzük, hogy a nemnulla természetes számokból sorban leírunk egyet, kihagyunk egyet, leírunk kettőt, kihagyunk kettőt, ..., leírunk n -et, kihagyunk n -et és így tovább. Az így kapott sorozatban szerepel-e az 1029, illetve a 2019? Ha valamelyik szerepel, akkor ez hányadik tagja a sorozatnak?

5. feladat. Egy szabályos háromszög oldala 2019 egység hosszú. A háromszöget oldalával párhuzamos egyenesekkel 1 egység oldalú szabályos háromszögekre osztottuk. Ezt követően a rácsvonalak mentén a háromszögből a lehető legtöbb olyan paralelogrammát vágtuk ki, amelynek oldalai 1 és 2 egység hosszúak. Hány paralelogrammát vágunk ki?

6. feladat. Az ABC háromszögben $\widehat{BAC} = 45^\circ$ és $\widehat{CBA} = 75^\circ$. Jelöljük O -val a háromszög körülírt körének középpontját és H -val a háromszög magasságpontját. A HO egyenes a CA és CB oldalakat rendre a P , illetve Q pontokban metszi.

a) Igazold, hogy az O pont távolsága az AB oldaltól feleakkora, mint a H pont távolsága a C csúcstól!

b) Mutasd ki, hogy a CPH és CQO háromszögeknek közös a magasságpontjuk!

Megjegyzések:

- Munkaidő: 4 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, hivatalból 1 pont jár.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont kapható.