XXVIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Marosvásárhely, 2019. április 24 – 28.

IX. osztály

1. feladat. Egy ókori világváros alapításának évszáma egy háromjegyű szám a tízes számrendszerben. Ha az utolsó számjegy eltávolításával kapott kétjegyű számból kivonjuk az első számjegy eltávolításával kapott kétjegyű számot, akkor az eredmény 22. Az évszám számjegyeinek különböző sorrendjeként keletkezett 6 darab háromjegyű szám összege 3330. Melyik ez a szám, ha az évszám számjegyei négyzetének összege 83?

2. feladat. Egy táblára felrajzoltunk 2010 darab zöld színű, 2016 darab piros és 2019 darab kék színű négyzetet. Egy lépésben két különböző színű négyzetet letörlünk és helyette a harmadik színű négyzetből rajzolunk fel egyet. Igazold, hogy ezen eljárás ismétlésével elérhetjük, hogy csak egyféle színű négyzet maradjon a táblán! Lehet-e ez a szín a kék, hát a piros, hát a zöld?

3. feladat. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja F. Legyen D a CF szakasz azon belső pontja, amelyre $\widehat{ADB}$ derékszög. Legyen E a DF szakasz azon belső pontja, amelyre a CD és DE szakaszok hossza egyenlő. Határozd meg az $\widehat{AEB}$ mértékét!

4. feladat. Határozd meg az összes olyan $n = p \cdot q \cdot r$ prímtényezős felbontású számot, melyre

$$\frac{q}{p-1} = \frac{r}{p+1} + 1.$$

5. feladat. Legyen n egy tetszőleges 5-nél nagyobb egész szám. Igazold, hogy bármely négyzet felbontható n darab, legfeljebb 2 különböző méretű, négyzetre!

6. feladat. Adott az ABC háromszög. Legyen M az AB oldal felezőpontja. A BC oldalon felvesszük az N pontot, úgy, hogy $T_{MBN_\triangle} = T_{CPN_\triangle}$, ahol $\{P\} = MN \cap AC$, C az AP szakasz belső pontja. Az N ponton át az AB-hez húzott párhuzamos a BP egyenest Q-ban metszi, a C ponton át az AQ-hoz húzott párhuzamos a BE egyenest F-ben metszi, ahol $\{E\} = AQ \cap MC$.

a.) Igazold, hogy $BECQ$ paralelogramma!

b.) Igazold, hogy Q, N, F kollineáris pontok!

Megjegyzések:

- Munkaidő: 4 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont kapható.